Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit erster Fundamentalform (g_{ij}) und zweiter Fundamentalform (h_{ij}). Es sei $x \in U$ kein Nabelpunkt von F (vergleiche Serie 7, Aufgabe 3). Berechnen Sie die beiden Hauptkrümmungen $\kappa_{1,2}(x)$ sowie die beiden Hauptkrümmungsrichtungen $v_{1,2}(x)$ von F in Termen von $(g_{ij})(x)$ und $(h_{ij})(x)$ und zeigen Sie, dass die Hauptkrümmungsrichtungen in einer Umgebung von x stetig sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $F : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(t,\theta) = \left(\sqrt{1+t^2}\cos\theta,\ \sqrt{1+t^2}\sin\theta, t\right).$$

Fertigen Sie eine Skizze an. Zeigen Sie, dass in allen $(t,\theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ zwei linear unabhängige Asymptotenrichtungen $V_\pm(t,\theta)$ existieren, und dass die Geraden durch $F(t,\theta)$ in Richtung $\mathrm{D}_{V_\pm(t,\theta)}F(t,\theta)$ auf der Fläche liegen.

Aufgabe 3 (*Mittlere Krümmung von Graphen*) (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $u \in C^2(U)$. Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche gegeben durch $F(x,y) = (x, y, u(x,y))$. Zeigen Sie, dass die mittlere Krümmung H von F gegeben ist durch

$$H = \operatorname{div}(A(\mathrm{D}u))$$

für eine Funktion $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Geben Sie die Funktion A an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Für eine reguläre Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $F(x,y) = (x,y,u(x,y))$, bezeichne mit V_F das von F eingeschlossene Volumen gegeben durch

$$V_F = \int_U u(x,y)\,dxdy.$$

Sei $u_0 \in C^0(\partial U)$. Für gegebenes $V_0 \in \mathbb{R}$ definiere die Mengen

$$M = \left\{ u \in C^2(\overline{U}) \,\middle|\, u = u_0 \text{ auf } \partial U \right\},$$

$$N = \left\{ F \in C^2(\overline{U}, \mathbb{R}^3) \,\middle|\, F(x,y) = (x,y,u(x,y)) \text{ mit } u \in M, V_F = V_0 \right\}.$$

Sei $F_0 \in N$ mit $A(F_0) \le A(F)$ für alle $F \in N$, wobei $A(F)$ den Flächeninhalt von F bezeichnet. Zeigen Sie, dass die mittlere Krümmung von F_0 konstant ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, den 13.07.11.